Cálculo II – 2020/2021

Aula 22

①/2

Planificação **Aula 22** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 01/06, 16h30

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 74, 75 e 76 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 23 e 24 — **EDOs de Bernoulli**

Definição: Uma EDO de Bernoulli é uma equação do tipo

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}}$$

Nota: Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ a EDO é linear de 1.ª ordem

Procedimento para resolver uma EDO de Bernoulli

1.º Passo: Escrever a EDO na forma $\boxed{y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}}$

2.º Passo: Multiplicar ambos os membros da EDO por $y^{-\alpha}$, obtendo-se

$$y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$

3.º Passo: Efetuar a mudança de variável $\boxed{z = y^{1-\alpha}}$. Logo $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ $\Leftrightarrow \frac{z'}{1-\alpha} = y^{-\alpha}y'$
e obtém-se

$$\frac{z'}{1-\alpha} + a(x)z = b(x) \Leftrightarrow \boxed{z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x)}$$

↳ EDO linear de 1.ª ordem

4.º Passo: Resolver a EDO linear obtida

5.º Passo: Regressar à variável original fazendo $z = y^{1-\alpha}$ e resolver em ordem a y

Exercício 1: Resolver a EDO $y' + \frac{1}{x}y = xy^2, \ x > 0$

Exercício 2: Resolver o PVI $\begin{cases} x^2y' - 2xy = 3y^4 \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Trajetórias Ortogonais

Nota: Esta matéria não está nos slides. Ver páginas 75 e 76 dos apontamentos teóricos e figuras enviadas por email.

Definição: Uma trajetória ortogonal a uma família de curvas, é uma curva que interseta ortogonalmente cada um dos membros dessa família.

Nota: Dada uma família de curvas que são solução de uma EDO $y' = f(x,y)$, a família das suas trajetórias ortogonais é solução da EDO $y' = -\frac{1}{f(x,y)}$

Recordar: dadas as retas r e s, se $r \perp s$ então $m_r = -\frac{1}{m_s}$

Procedimento para determinar trajetórias ortogonais

1.º Passo: Determinar a EDO associada à família de curvas dada $\rightsquigarrow y' = f(x,y)$

2.º Passo: Escrever a EDO das trajetórias ortogonais $\rightsquigarrow y' = -\frac{1}{f(x,y)}$

3.º Passo: Resolver a EDO anterior

Nota: Para resolver o 1.º passo rever os exercícios 4 e 5 da aula 19

Exercício 3: Determinar as trajetórias ortogonais às seguintes famílias de curvas:

a) $y = kx^2$

b) $xy = c \quad , c \neq 0$

c) $y = \ln(x^2+c)$

TPCs: Folha prática 4 : 16, 18

Ex. Recurso, 08/07/2019 → Ex. 7

Teste 1, 05/04/2017 → Ex. 6

Aula 22

1) $y' + \frac{1}{x}y = xy^2,\ x>0 \rightsquigarrow$ EDO de Bernoulli

1º Passo: Escrever a EDO na forma $\boxed{y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}}$

Já está nessa forma $\rightsquigarrow a(x) = \frac{1}{x}\ ;\ b(x) = x\ ;\ \alpha = 2$

$\times y^{-\alpha}$

2º Passo: Multiplicar ambos os membros da EDO por $y^{-\alpha}$, obtendo-se $\boxed{\underbrace{y^{-\alpha}y'}_{\frac{z'}{1-\alpha}} + a(x)\underbrace{y^{1-\alpha}}_{z} = b(x}$

$$y' + \frac{1}{x}y = xy^2 \overset{\times y^{-2}}{\rightsquigarrow} y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = x$$

3º Passo: Mudança de variável: $\boxed{z = y^{1-\alpha}} \rightsquigarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, ou seja, $\boxed{\frac{z'}{1-\alpha} = y^{-\alpha}y'}$

Obtém-se

$$\frac{z'}{1-\alpha} + a(x)z = b(x) \Leftrightarrow \boxed{z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x)}$$

↳ EDO linear de 1ª ordem

$$z = y^{1-2} \Leftrightarrow \boxed{z = y^{-1}} \longrightarrow z' = -y^{-2}y' \Leftrightarrow \boxed{-z' = y^{-2}y'}$$

Então $\underbrace{\boxed{y^{-2}y'}}_{-z'} + \frac{1}{x}\underbrace{\boxed{y^{-1}}}_{z} = x \Leftrightarrow -z' + \frac{1}{x}z = x \Leftrightarrow \boxed{z' - \frac{1}{x}z = -x}$

EDO linear

4º Passo: Resolver a EDO linear obtida $\rightsquigarrow z' - \frac{1}{x}z = -x$

Passo 4.1: $p(x) = -\frac{1}{x}$ e $q(x) = -x$

Passo 4.2: $\mu(x) \overset{\text{TPC}}{=} \dots = \frac{1}{x}$ ver teoria

Passo 4.3: $\frac{1}{x} \times \left(z' - \frac{1}{x}z\right) = \frac{1}{\cancel{x}} \times (-\cancel{x}) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} \times z\right)' = -1$

Passo 4.4 Integrando fica $\frac{1}{x} \times z = \int -1\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{x} \times z = -x + c,\ c \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow z = x \times (-x + c),\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{z = -x^2 + cx,\ c \in \mathbb{R}}$$

5º Passo: Regressar à variável inicial fazendo $\boxed{z = y^{1-\alpha}}$ e resolver em ordem a y:

$z = -x^2 + cx,\ c \in \mathbb{R}$ $\quad z = y^{-1}$

$\Leftrightarrow y^{-1} = -x^2 + cx,\ c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = -x^2 + cx,\ c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{-x^2 + cx},\ c \in \mathbb{R}}$

2) $\begin{cases} x^2y' - 2xy = 3y^4 \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

1º Passo: $\frac{\cancel{x^2}y'}{\cancel{x^2}} - \frac{2\cancel{x}y}{x^{\cancel{2}}} = \frac{3y^4}{x^2} \Leftrightarrow \boxed{y' - \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^2}y^4}$ $a(x) = \frac{-2}{x}$; $b(x) = \frac{3}{x^2}$; $\alpha = 4$

$$\Big\downarrow \text{2º Passo} \quad \times y^{-4}$$

$$\boxed{y^{-4}y' - \frac{2}{x}y^{-3} = \frac{3}{x^2}}$$

3º Passo: $z = y^{1-4} \Leftrightarrow \boxed{z = y^{-3}} \rightsquigarrow z' = -3y^{-4}y' \Leftrightarrow \boxed{\frac{z'}{-3} = y^{-4}y'}$

$$\underbrace{\boxed{y^{-4}y'}}_{\frac{z'}{-3}} - \frac{2}{x}\underbrace{\boxed{y^{-3}}}_{z} = \frac{3}{x^2} \Leftrightarrow \frac{z'}{-3} - \frac{2}{x}z = \frac{3}{x^2} \underset{\times(-3)}{\Leftrightarrow} \boxed{z' + \frac{6}{x}z = -\frac{9}{x^2}}$$

EDO Linear

Passo 4.1 $p(x) = \frac{6}{x}$ e $q(x) = \frac{-9}{x^2}$

Passo 4.2 C. aux. $\int p(x)\,dx = \int \frac{6}{x}\,dx = 6\int \frac{1}{x}\,dx = 6\ln|x|$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{6\ln|x|} = e^{\ln|x|^6} = |x|^6 = x^6$$

Passo 4.3: T.P.C.

Passo 4.4: $z = \frac{1}{\mu(x)} \times \int \mu(x) \times q(x)\,dx \Leftrightarrow z = \frac{1}{x^6}\int x^6 \times \left(-\frac{9}{x^2}\right)dx$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{x^6}\int -9x^4\,dx \Leftrightarrow z = \frac{1}{x^6}\left(\frac{-9x^5}{5} + c\right), \; c \in \mathbb{R}$$

5º Passo: $z = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$ $\Big\downarrow z = \frac{1}{y^3}$

$$\frac{1}{y^3} = \frac{1}{x^6}\left(\frac{-9x^5}{5} + c\right), \; c \in \mathbb{R}$$

6º Passo: Usar a condição extra para obter o valor de C.

$$\underset{x}{y(1)} = \underset{y}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{1^6}\left(\frac{-9 \times 1^5}{5} + c\right) \Leftrightarrow \overset{\text{TPC}}{\cdots} \Leftrightarrow c = \frac{49}{5}$$

Então

$$\frac{1}{y^3} = \frac{1}{x^6}\left(\frac{-9x^5}{5} + \frac{49}{5}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{y^3} = \frac{-9x^5 + 49}{5x^6}$$

$$\Leftrightarrow y^3 = \frac{5x^6}{-9x^5 + 49} \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{5x^6}{-9x^5 + 49}}$$

3)

a) $y = kx^2 \rightsquigarrow$ parábola

1º Passo: Determinar a EDO associada à família de curva dada $\rightsquigarrow y' = f(x,y)$

$y = kx^2 \rightsquigarrow y' = 2kx$

$\hookrightarrow \frac{y}{x^2} = k \rightarrow$ Então $y' = 2 \times \frac{y}{x^{\cancel{2}}} \times \cancel{x} \Leftrightarrow \boxed{y' = \frac{2y}{x}} \to f(x,y)$

2º Passo: Escrever a EDO das trajetórias ortogonais $\rightsquigarrow y' = -\frac{1}{f(x,y)}$

$$y' = -\frac{1}{\frac{2y}{x}} \Leftrightarrow y' = \frac{-x}{2y}$$

3º Passo: Resolver a EDO anterior

$$y' = \frac{-x}{2y} \quad \text{(EDO de variáveis separáveis)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{2y} \Leftrightarrow 2y\,dy = -x\,dx$$

Integrando

$$\int 2y\,dy = \int -x\,dx \Leftrightarrow \frac{2y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + y^2 = c,\ c \in \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ elipses.

b) $xy = c$ Derivando

1º Passo: $(xy)' = (c)' \Leftrightarrow 1 \times y + x \times y' = 0 \Leftrightarrow xy' = -y \Leftrightarrow y' = \frac{-y}{x}$ $f(x,y)$

2º Passo: $y' = -\frac{1}{\frac{-y}{x}} \Leftrightarrow y' = \frac{x}{y}$

3º Passo: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y\,dy = x\,dx$ integrando

hipérboles

$$\int y\,dy = \int x\,dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = c \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 2c,\ c \in \mathbb{R}$$

c) $y = \ln(x^2 + c)$

1º Passo: (Ex. 5 da aula 19) $\rightsquigarrow y' = \frac{2x}{e^y}$

2º Passo: $y' = -\frac{1}{\frac{2x}{e^y}} \Leftrightarrow y' = -\frac{e^y}{2x}$

3º Passo: $\frac{dy}{dx} = \frac{-e^y}{2x} \Leftrightarrow -\frac{1}{e^y}dy = \frac{1}{2x}dx \Leftrightarrow -e^{-y}dy = \frac{1}{2x}dx$

Integrando

$$\int -e^{-y}\,dy = \int \frac{1}{2x}\,dx \Leftrightarrow e^{-y} = \frac{1}{2}\ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R}$$

$u = -y \quad u' = (-y)' = -1$